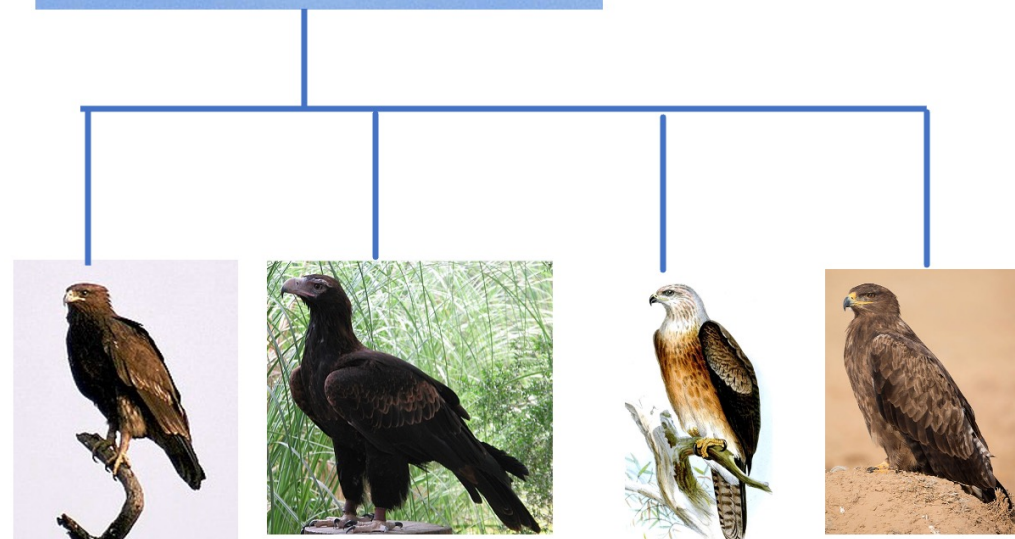


Введение в теорию графов



ГРАФ Орлов

Марков Ярослав, 7 б



План презентации



- Немного истории
- Что такое граф и виды графов
- Важная формула полного графа
- Пути и циклы в графе
- Понятие об ориентированном графе
- Пример задач

История



Историю **теории графов** связывают с математиком **Леонардом Эйлером**, когда он в Санкт-Петербурге решал задачу о семи кёнигсбергских мостах – возможности прогулки по мостам без повторения маршрута в городе Кенигсберг (ныне Калининград).

Кстати, слово граф (позже) произошло от словосочетания: графическое описание, а не от сословия!



Эйлер – российский, швейцарский, прусский
математик
1707-1783 гг

Задача о семи кёнигсбергских мостах –
как их пройти, не проходя ни по одному из них дважды?



Ответ: никак

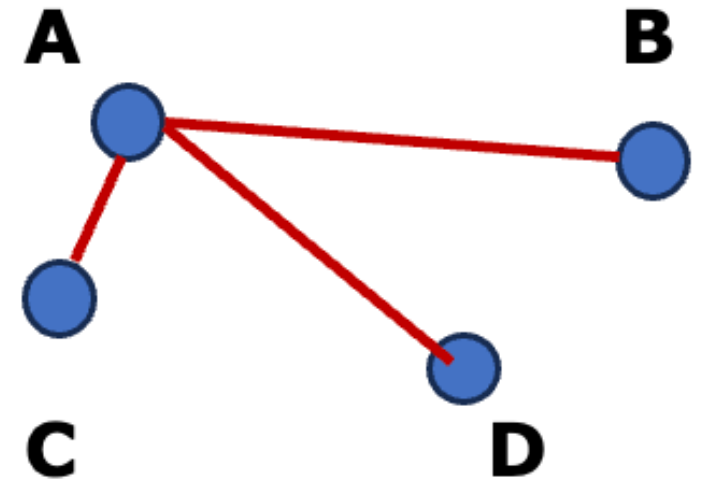
Что такое граф?



Граф — это геометрическая фигура, которая состоит из **точек** и **линий**, которые их соединяют.

Точки называют **вершинами** графа, а линии — **ребрами**.

Смежные вершины — если они соединены ребром.



Вершины: A, B, C, D

Ребра: AC, AD, AB

Примеры графов



Семейство графа Дракулы

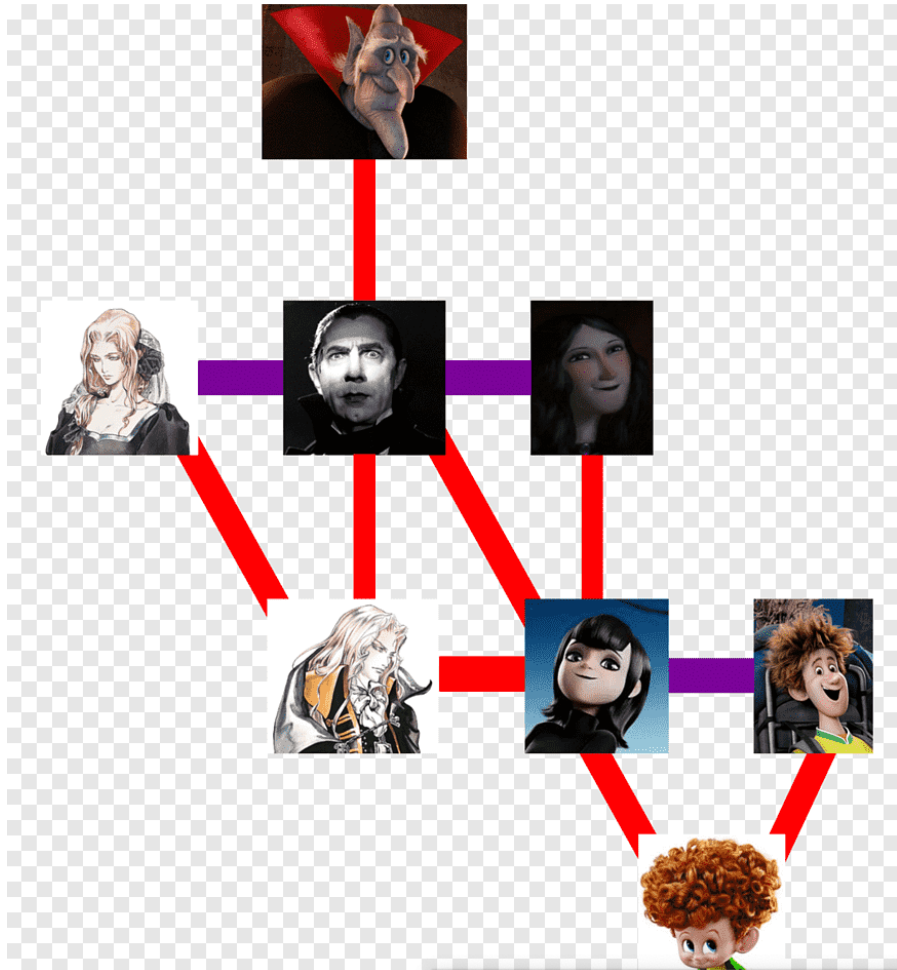
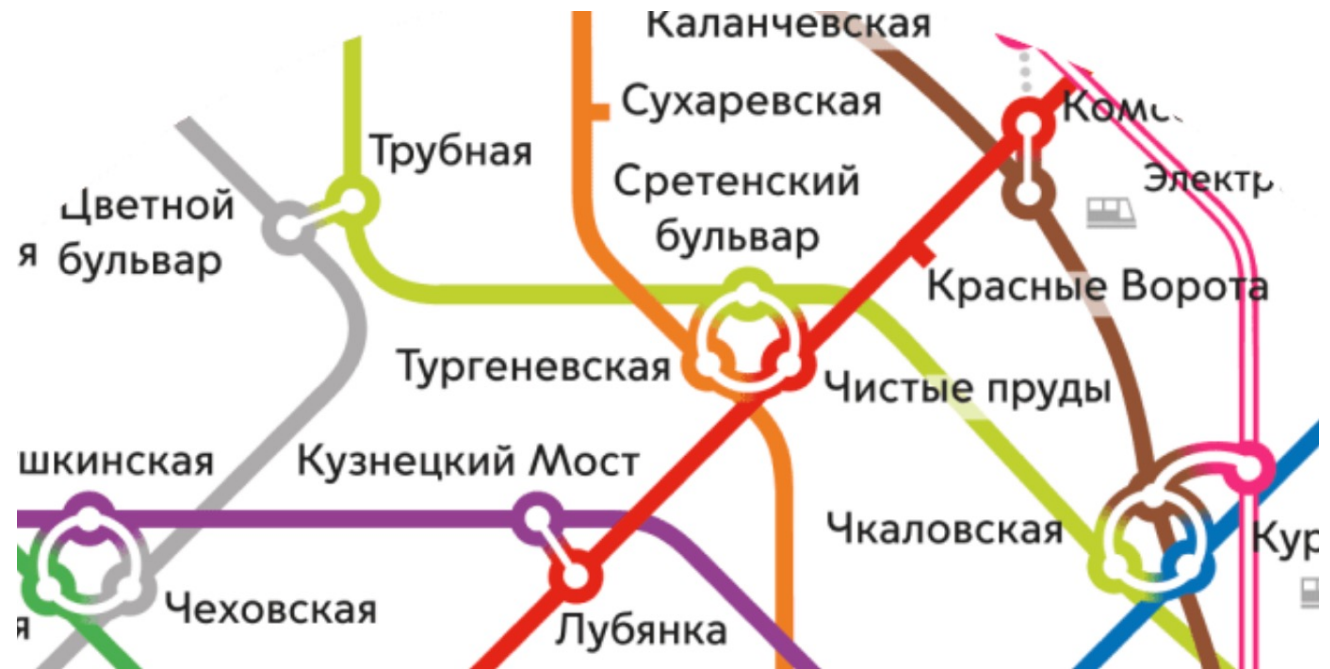


Схема метро



Виды ребер

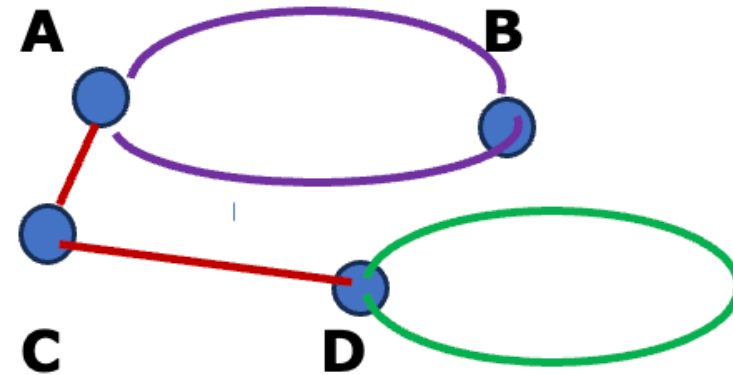


Ребро графа называется **звеном**, если у него два конца.

Ребро графа может быть **петлёй**, если два конца совпадают.

Рёбра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются **кратными ребрами**.

Ребра смежные – если есть общая вершина.



Петля: DD

Кратные ребра: AB

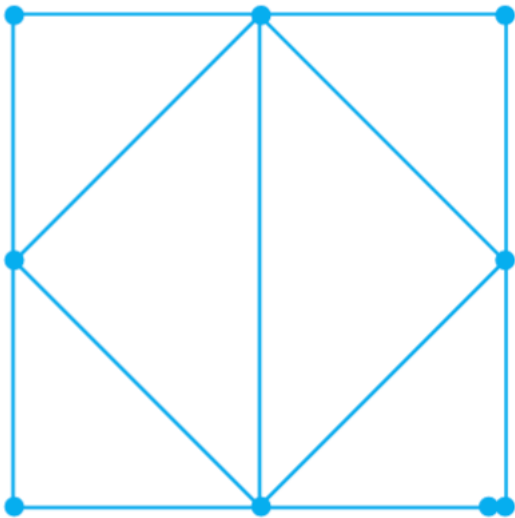
Звено: AC, CD и др.

Смежные ребра: CD и CA, CA и AB и др.

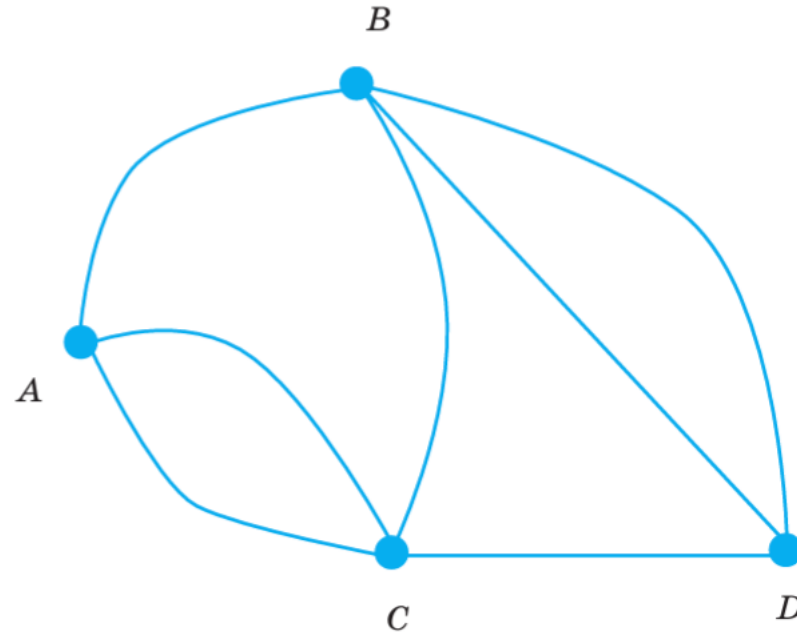
Виды графов



- Нулевой граф – если нет ребер (только вершины).
- Простой граф – если **нет** петель и кратных рёбер.
- Мультиграф – если две вершины соединены **более** чем одним ребром.
- Полный граф – если **любые две** его вершины соединены **только и только одним** ребром (все вершины соединены, но только одним ребром-звеном).



Простой граф – все просто



Мультиграф



Полный граф

Формула полного графа

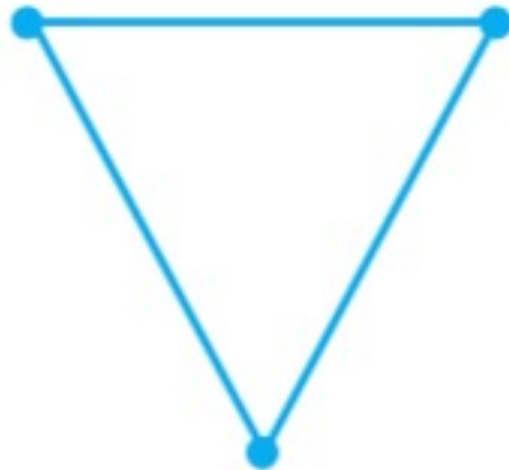


Если **полный граф** имеет n вершин, то количество рёбер равно:

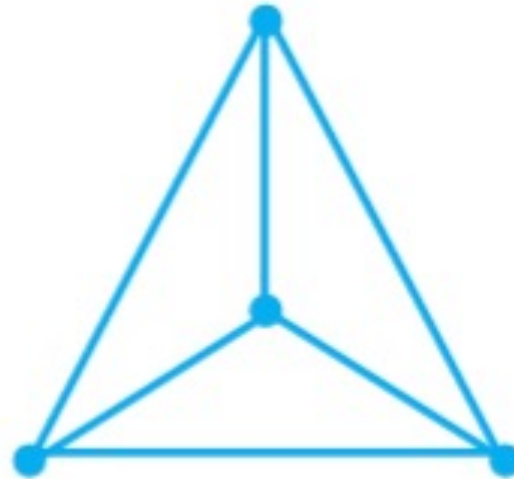
$$\frac{n(n-1)}{2},$$



$$(2 \cdot (2-1)) / 2 = 1$$



$$(3 \cdot (3-1)) / 2 = 3$$



$$(4 \cdot 3) / 2 = 6$$



$$(5 \cdot 4) / 2 = 10$$

КАК ПРОЙТИ?

$$\frac{n(n-1)}{2} = 7,$$
$$n(n-1) = 14.$$

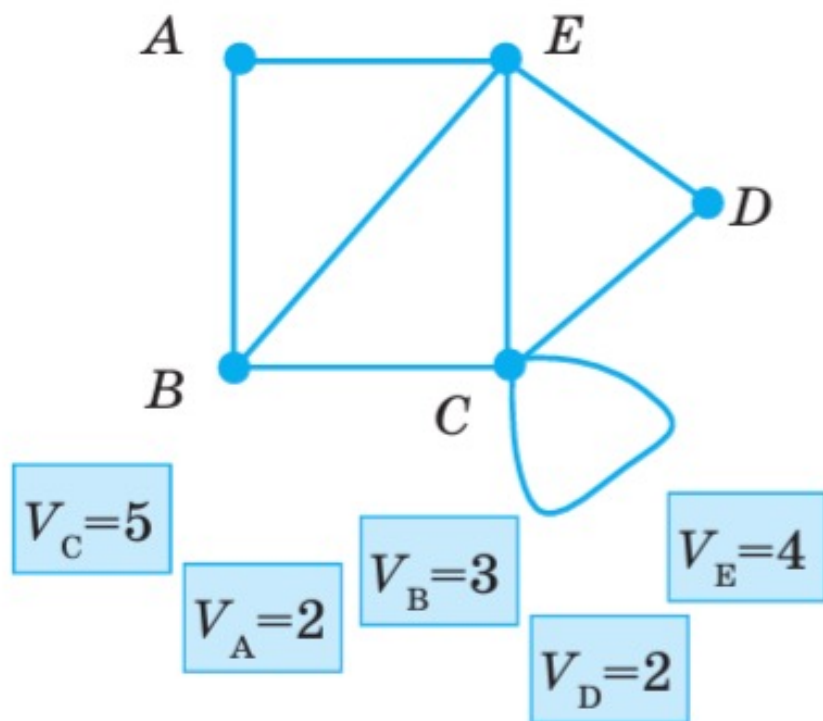
Следовательно, такого графа не существует.

Степень (валентность) вершины



Степенью вершины называется **число рёбер** графа, которым принадлежит эта вершина.

Вершина, имеющая чётную степень (число ребер), называется **чётной** вершиной, а вершина, имеющая нечётную степень, называется **нечётной** вершиной.



Чётные	Нечётные
A, D, E	B, C

Кстати, если сложить все степени вершин и разделить на два, то получим число ребер!

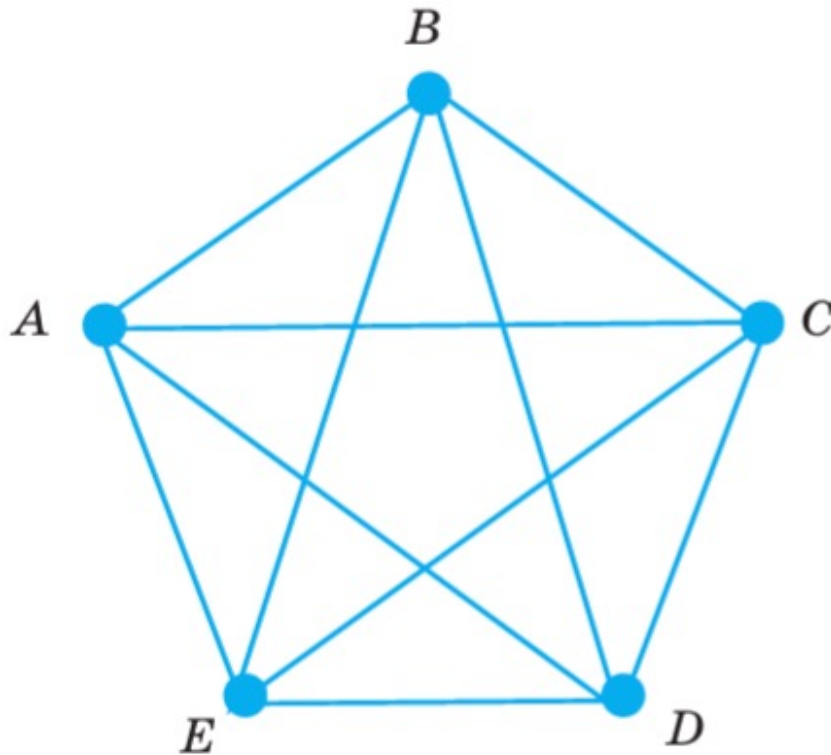
$$5 + 2 + 3 + 2 + 4 = 16$$
$$16 / 2 = 8$$

Однородные графы



Если степени (валентность) всех вершин графа равны, то граф называется однородным.

Таким образом, любой **полный граф — однородный**.



$$V_C = V_A = V_B = V_D = V_E = 4$$

В однородном графе число ребер можно определить двумя способами:

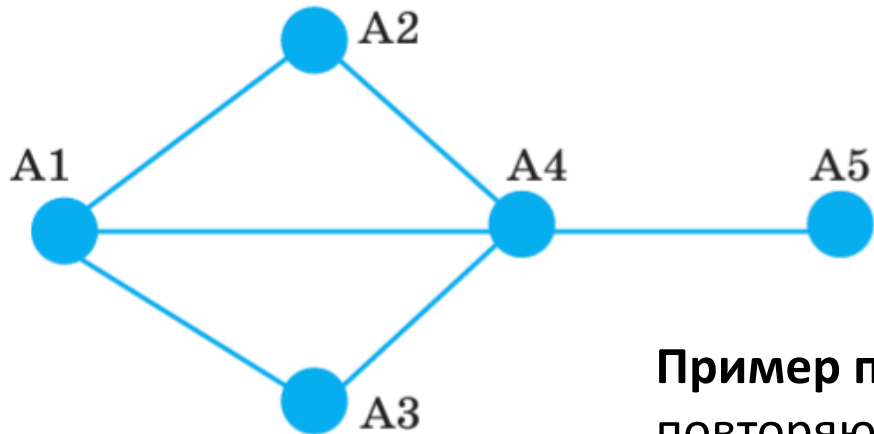
$$1. 5V / 2 = 20 / 2 = 10$$

$$2. n(n-1)/2 = (5 \cdot 4) / 2 = 10$$

Путь графа

Путём в графе называется такая последовательность рёбер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое **ребро** не встречается более одного раза.

Путь называется **простым**, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

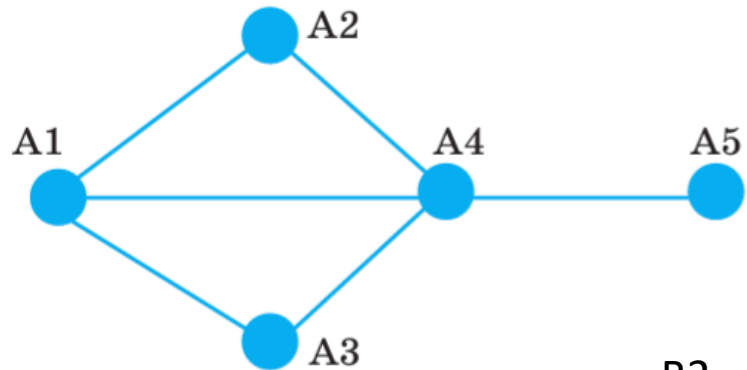


Пример простого пути: (A1 A4); (A4 A5) – вершины и ребра дважды не повторяются!

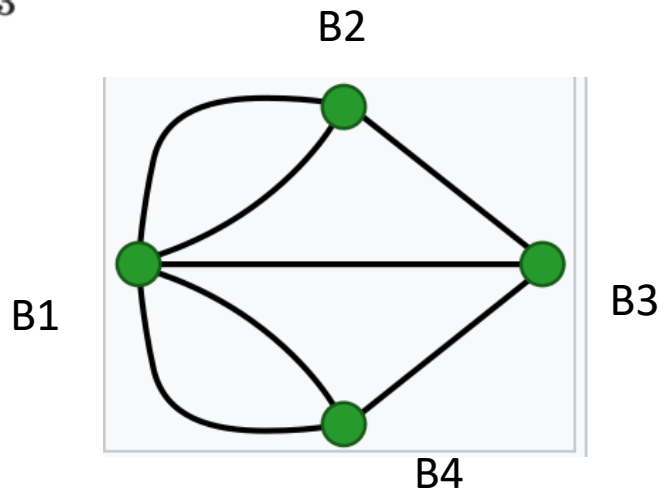
Непростой путь: (A1 A2) (A2 A4) (A4 A3) (A3 A1) (A1 A4); (A4 A5) – заметим, что ребра не повторяются, то есть - это путь, но очень непростой

Эйлеров путь графа

Эйлеров путь (эйлерова цепь) в графе — это путь, проходящий **по всем** рёбрам графа и притом только по одному разу.



Пример : (A1 A2) (A2 A4) (A4 A3) (A3 A1) (A1 A4); (A4 A5)

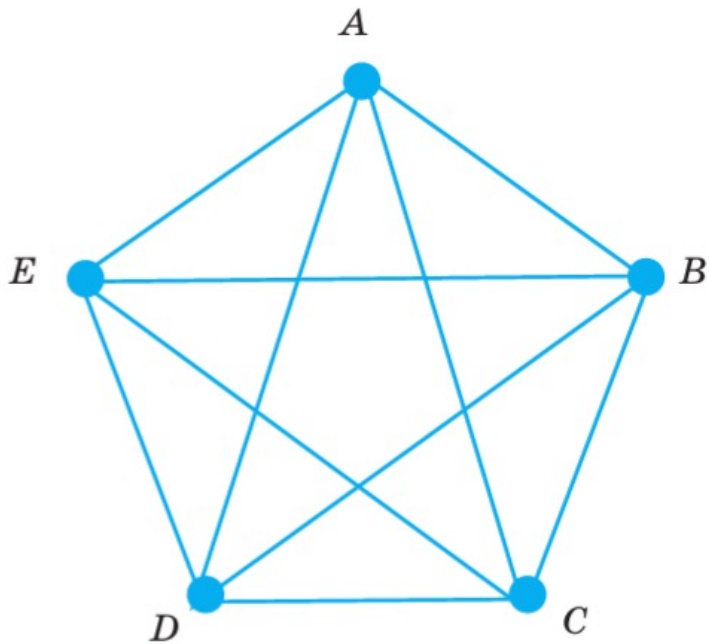


Здесь нет Эйлерова пути! Нельзя пройти по всем ребрам. Именно только по разу.

Цикл графа

Циклом называется путь, в котором **совпадают его начальная и конечная** вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из **вершин** графа более одного раза

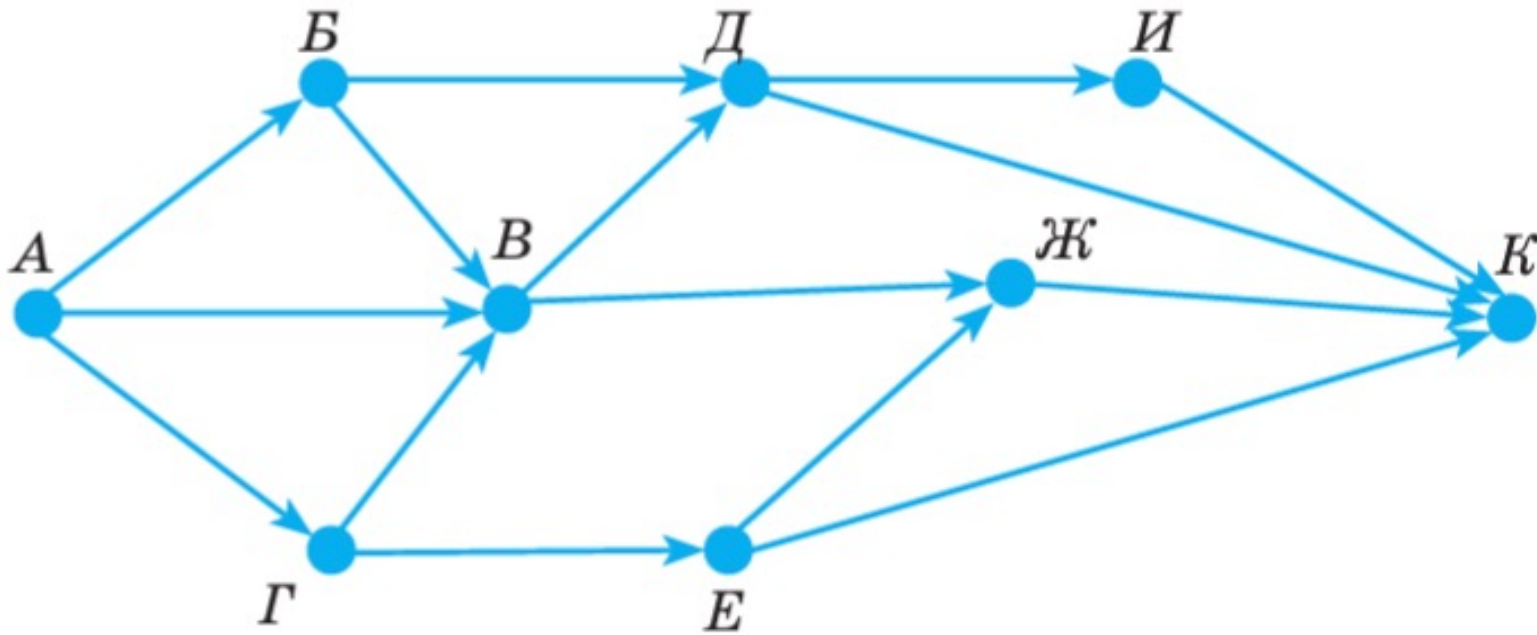


(AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т. д. — простые циклы;

Кстати, граф с циклом называют еще **сетью!**

Ориентированный граф

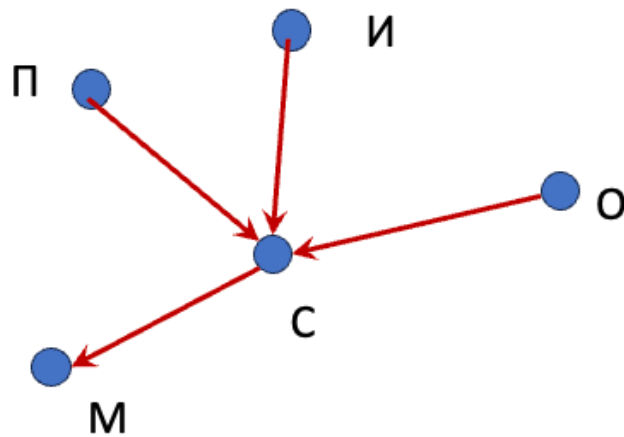
Ориентированный граф — это граф, на рёбрах которого обозначены разрешённые **направления** движения (проще говоря, расставлены стрелочки).



Примеры ориентированного графа



Притоки рек



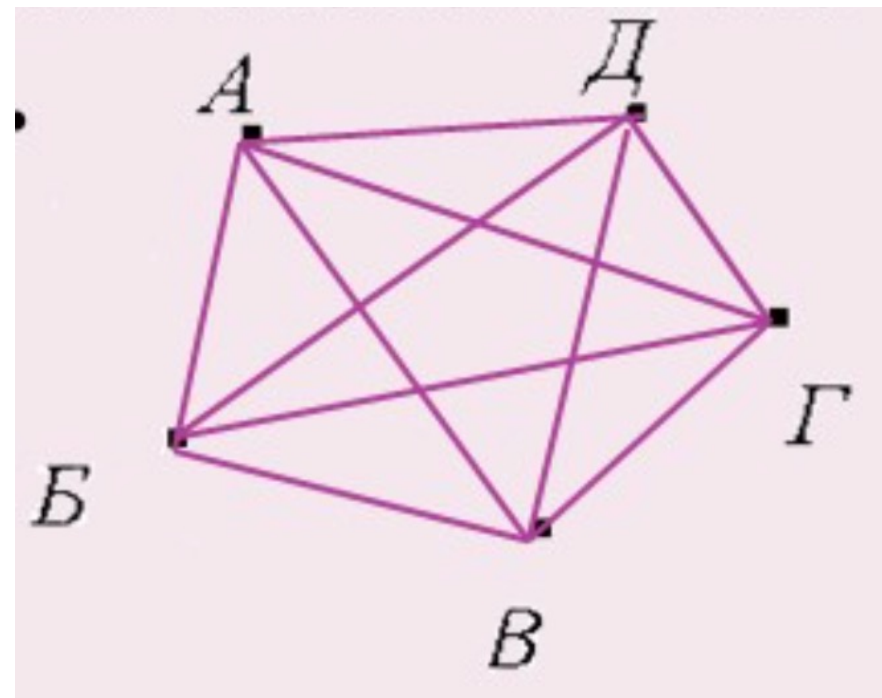
Семантическая сеть



Пример задачи, решаемой с помощью теории графов

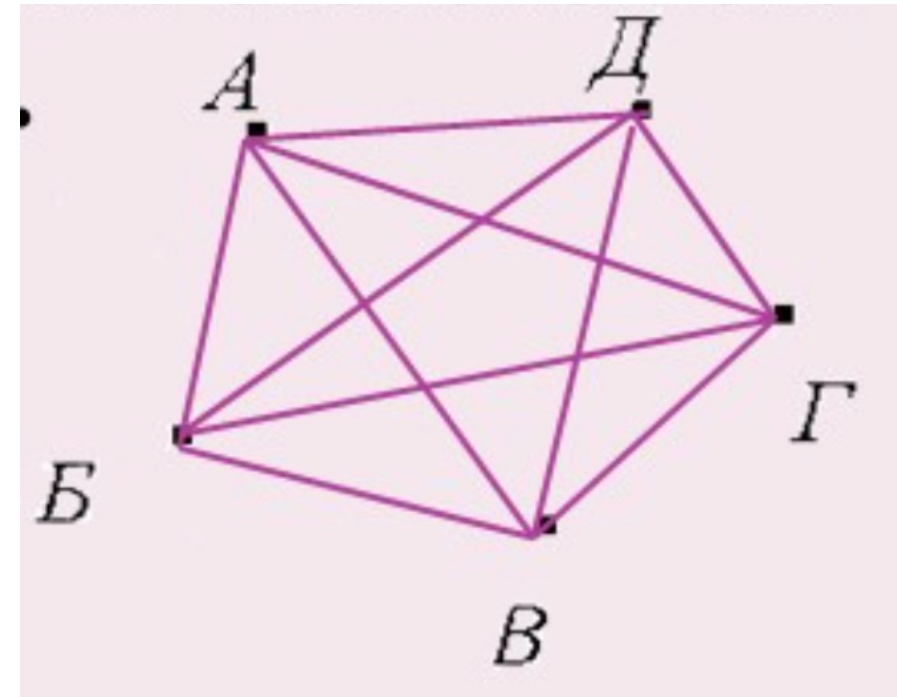


- Петя, Коля, Вася, Саша и Жора при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал каждому по одному разу).
Сколько всего рукопожатий было сделано?
- Решение:
Представим группу мальчиков в виде графа (вершина – мальчик, рукопожатие – ребро), тогда имеем граф с 5-ю вершинами.
- Можно применить формулу о полном графе:
$$n(n - 1) / 2 = 5 \cdot (5 - 1) / 2 = 10$$
- А можно использовать формулу о сумме степеней (степень каждой вершины – 4) :
$$4+4+4+4+4 = 20, \quad 20 / 2 = 10$$
 Ответ: 10.



Пример задачи по кибербезопасности

- Пять разведчиков Арнольд, Рихард, Алекс, Юстас и Мата решили вести секретную переписку по шифру Цезаря, но строго между собой! Для этого им необходимо сгенерировать ключи шифрования. Сколько ключей шифрования им надо сгенерировать, чтоб переписка была секретной?
- Решение:
Представим группу из пяти разведчиков в виде графа (вершина – разведчик, секретная переписка – ребро), тогда имеем полный граф с 5-ю вершинами.
- Можно применить формулу о полном графе:
$$n(n - 1) / 2 = 5 \cdot (5 - 1) / 2 = 10$$
- Ответ: 10.



Источники

- Л. И. Соколова. Основные понятия теории графов теории графов. Цикл уроков. 7 класс. www.e-osnova.ru/PDF/osnova_2_34_6453.pdf
- Математика. Вероятность и статистика. Базовый уровень. 7-9 классы. Часть 2. / Высоцкий И.Р., Яценко И.В. – Москва, Просвещение, 2024.
- Википедия и интернет

Спасибо за внимание!

Ярослав Марков, 76
cyberbugz.ru

